Séquence 1 : Initiation à la programmation mathématique avec GAMS

Cours 1.1 : Optimiser sous contraintes

Leçon 1 : Un premier exemple

Florence Jacquet

ModelEco

Introduction

→ maximiser
→ minimiser

Optimiser $\quad Z = f(X)$
sous les contraintes $\quad g_i(X) \leq 0 \quad$ pour tout i

où X est le vecteur des variables de décision composé de j éléments x_j
Avec $\quad x_j \geq 0 \quad$ pour tout j

f(X) est la fonction objectif

F(X) linéaire → programmation linéaire
F(X) non linéaire → programmation mathématique

Programmation linéaire/mathématique

⇩

Formulation et résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes

ModelEco

Introduction

Programmation linéaire :
très utilisée dans l'industrie
Ex : industrie d'alimentation animale

€

€

€

GARANTIES	
Mat. Protéiniques (min %)	14,5
Mat. Grasses (min %)	1,6
Mat. Cellulosiques (max %)	7,5
Mat. Minérale (max %)	14
Vitamines (% kg) A.UL.	1.000.000
Vitamines (% kg) D3.U.I.	200.000

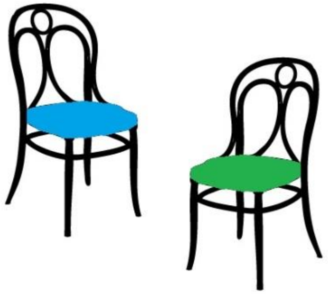
Quelle est la composition optimale qui respecte les teneurs souhaitées tout en minimisant les coûts de production ?

Introduction

€

€

€



€

€

Quelle est la quantité de chaises et de tables qu'il faut produire pour maximiser le revenu de l'entreprise ?

ModelEco

Une exploitation céréalière

Soit un agriculteur qui dispose de terre et de travail et qui peut cultiver du blé et du maïs. On veut déterminer la superficie optimale à cultiver en blé et maïs. On sait que:

€€€

- L’objectif de l’exploitant est de maximiser son revenu net (ou marge brute)

- Par ha, le blé rapporte 450 € et le maïs 1000 €

- Par ha, le blé nécessite 25h de travail et le maïs 50h

- La surface totale de l’exploitation est 50 ha et l’agriculteur ne peut fournir que 2000 h de travail par an

Mettez la vidéo sur pause et essayez de formuler ce problème, puis relancer la vidéo pour voir la solution

Formulation générale, écriture algébrique

Maximiser $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

avec $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \; ; i = 1, \cdots, m$

$x_j \geq 0 \; ; \; j = 1, \cdots, n$

Maximiser $Z = 450\, X_1 + 1000\, X_2$

avec $X_1 + X_2 \leq 50$

$\underline{25}\, X_1 + \underline{50}\, X_2 \leq 2000$

$X_1 \geq 0 \; ; \; X_2 \geq 0$

où
- Z valeur de la fonction objectif
- x_j niveaux d'activité ou variables de décision
- c_j rendements économiques de chaque activité
- a_{ij} matrice de coefficients techniques
- b_i disponibilités en ressources

où
- Z revenu de l'exploitation (euros)
- X_1 surface en blé (ha) 
- X_2 surface en maïs (ha) 

ModelEco

Formulation mathématique

1. Repérer et donner un nom aux variables
2. Ecrire les contraintes
3. Ecrire la fonction objectif

Z revenu de l'exploitation (euros)
X_1 surface en blé (ha) 
X_2 surface en maïs (ha) 

Maximiser $$Z = 450\ X_1 + 1000\ X_2 \quad (€)$$

avec
$$X_1 + X_2 \leq 50 \quad \text{(ha)}$$
$$25\ X_1 + 50\ X_2 \leq 2000 \quad \text{(heures)}$$
$$X_1 \geq 0\ ;\ X_2 \geq 0$$

ModelEco

Formulation générale, écriture matricielle

Dans notre exemple  

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximiser} & Z = c\,X \\
\text{avec} & A\,X \leq b \\
 & X \geq 0
\end{array}
$$

où X le vecteur des x_j
C le vecteur des c_j
A la matrice des a_{ij}
B le vecteur des b_j

X vecteur composé de 2 éléments $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$

c vecteur des rendements économiques $\begin{pmatrix} 450 & 1000 \end{pmatrix}$

b vecteur des disponibilités $\begin{pmatrix} 50 \\ 2000 \end{pmatrix}$

A matrice des coefficients techniques $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 25 & 50 \end{pmatrix}$

Rappel : $A\,X \leq B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 25 & 50 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 50 \\ 2000 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 50 \\ 25x_1 + 50x_2 \leq 2000 \end{array}$