Séquence 1 : Initiation à la programmation mathématique avec GAMS

Cours 1.3 : Problème primal, problème dual

Leçon 9 : Les valeurs duales c'est quoi ?

Florence Jacquet

ModelEco

Valeurs marginales

Valeur duale

```
Optimal solution found.
Objective :         40000.000000


                       LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU OBJECTIF        .         .         .       -1.000
---- EQU TERRE         -INF      40.000    50.000      .
---- EQU TRAVAIL       -INF    2000.000  2000.000    20.000

  OBJECTIF  fonction objectif
  TERRE  contrainte de terre
  TRAVAIL  contrainte de travail
```

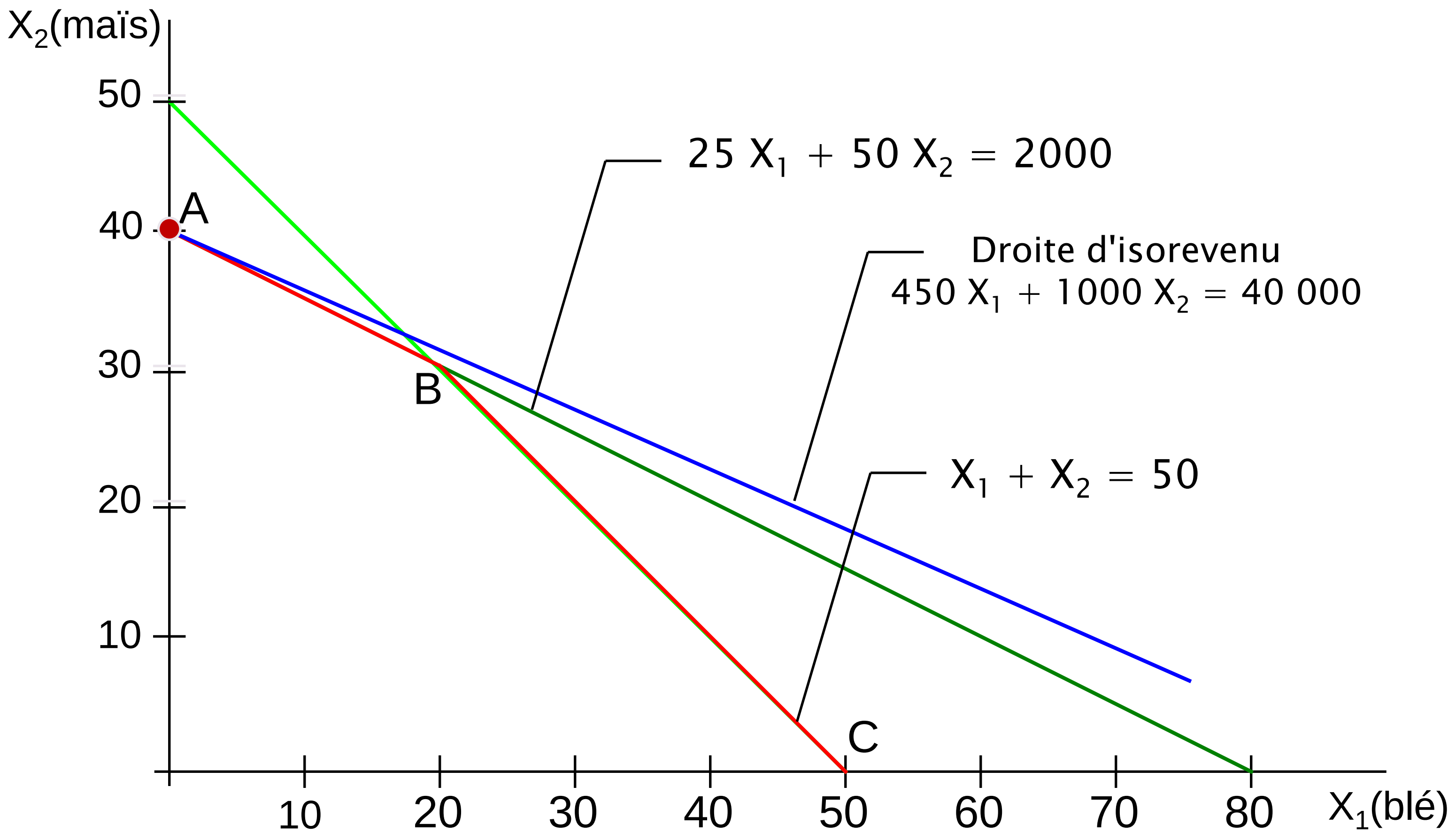
Vocabulaire :
<u>Contrainte saturée</u> → Contrainte qui prend sa valeur maximum

+1h ⇒ +20€ soit 40020€

2000h ⇒ solution : 40000€

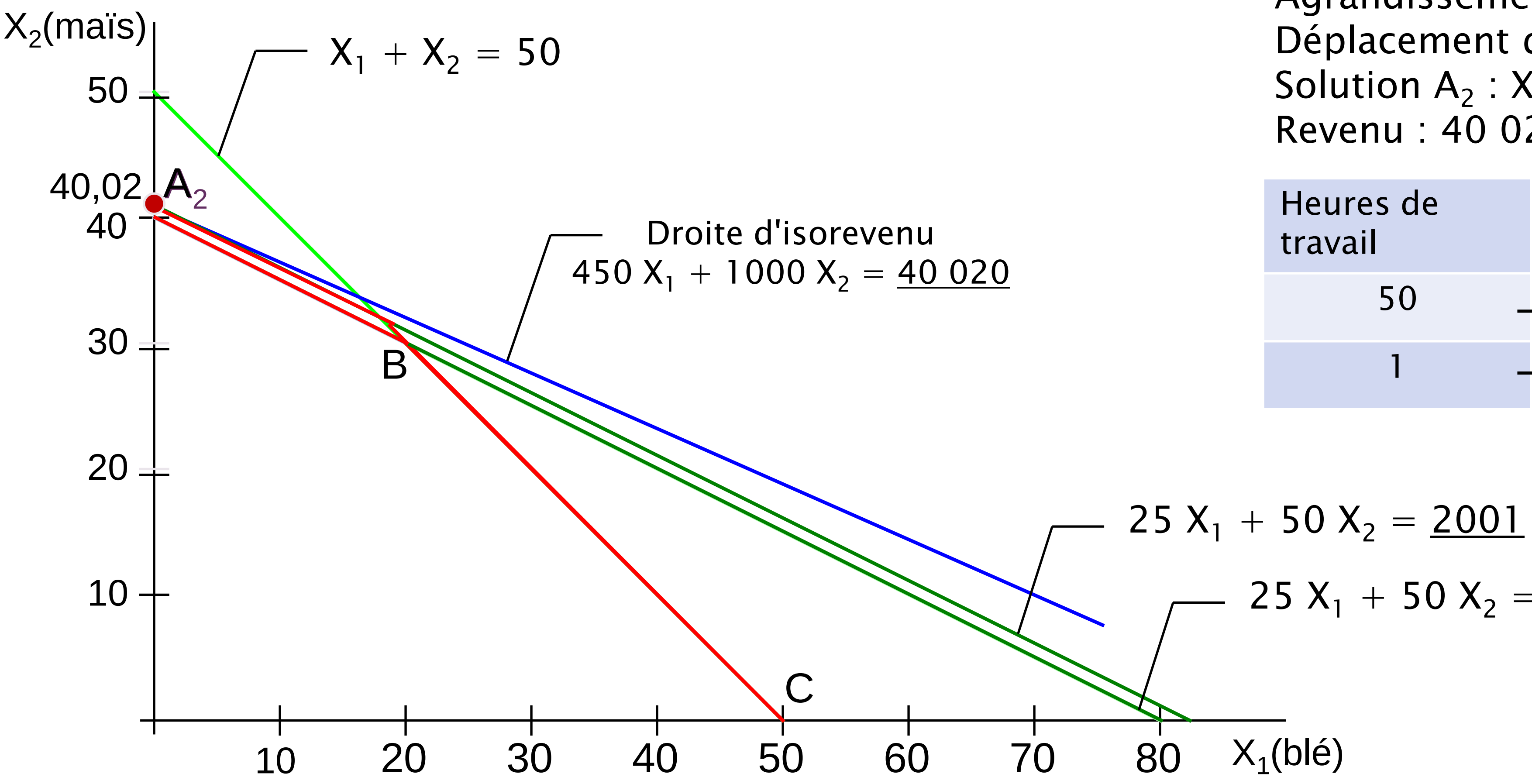
ModelEco

Modèle initial



Solution A : $X_1=0$; $X_2=40$
Revenu : 40 000
La contrainte de travail est saturée
La valeur marginale du travail est de 20

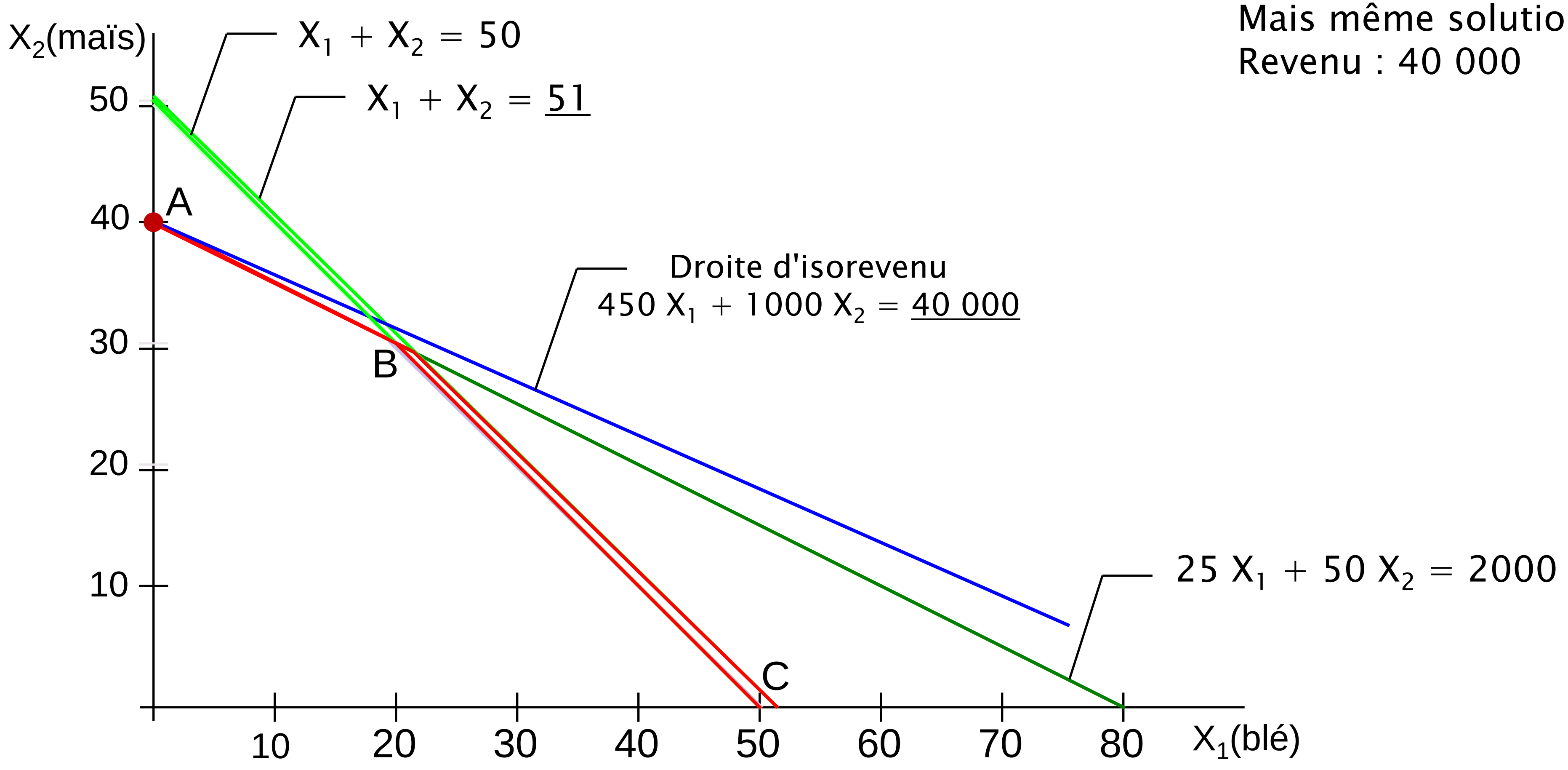
Simulation d'augmentation d'une heure de travail



Agrandissement de la région admissible
Déplacement de la droite d'isorevenu
Solution A_2 : $X_1=0$; $X_2=40{,}02$
Revenu : 40 020

Heures de travail	Pour … ha de mais	Rapporte …
50 →	1 →	1000€
1 →	0,02 →	20€

Simulation d'augmentation d'un hectare de terre



Agrandissement de la région admissible
Mais même solution → A : $X_1=0$; $X_2=40$
Revenu : 40 000

En résumé …

- A toute contrainte saturée est associée une valeur duale de la ressource considérée.

- Les valeurs duales des contraintes non saturées sont nulles.

Formulation générale d'un problème dual

Problème primal

$$\text{Max} \quad Z = \underset{(1,n)}{c}\;\underset{(n,1)}{x}$$

$$\text{Avec} \quad \underset{(m,n)}{A}\;\underset{(n,1)}{x} \leq \underset{(m,1)}{b}$$

$$\underset{(n,1)}{x} \geq 0$$

Problème dual

$$\text{Min} \quad Z = \underset{(1,m)}{b'}\;\underset{(m,1)}{y}$$

$$\text{Avec} \quad \underset{(n,m)}{A'}\;\underset{(m,1)}{y} \geq \underset{(n,1)}{c'}$$

$$\underset{(m,l)}{y} \geq 0$$

A' transposée de A
b' transposée de b
c' transposée de c

$$cx^* = b'y^*$$

Application à l'exploitation céréalière

Problème primal

Maximiser $Z = 450\,X_1 + 1000\,X_2$

avec $X_1 + X_2 \leq 50$

$25\,X_1 + 50\,X_2 \leq 2000$

$X_1 \geq 0\,;\, X_2 \geq 0$

x1 : superficie en blé (ha)

x2 : superficie en maïs (ha)

x1=0; x2*=40; Z=40000*

Problème dual

Minimiser $Z = 50Y_1 + 2000Y_2$

avec $Y_1 + 25Y_2 \geq 450$

$Y_1 + 50Y_2 \geq 1000$

$Y_1 \geq 0; Y_2 \geq 0$

valeurs duales
=
couts d'opportunités
=
valeurs implicites
=
« shadow prices »

y_1 : cout d'opportunité de la terre (€)

y_2 : cout d'opportunité du travail (€)

$\boxed{y_1^*=0;}\ \boxed{y_2^*=20;}$ *Z= 40000*

ModelEco

Interprétations économiques

Problème primal	Problème dual
Maximisation d'un revenu sous contraintes de disponibilités en ressources	Minimisation du coût total des ressources sous contraintes de leur contribution aux revenus des productions
→ Détermine les quantités/surfaces de chaque activité	→ Détermine les prix de chaque ressource