Séquence 3 : Le risque et le temps dans les modèles

Cours 3.1 : Le risque dans les modèles

Leçon 24 : Chance Constrained Model et Target-MOTAD

Florence Jacquet

ModelEco

Le comportement face au risque comme une contrainte de sécurité de revenu

- Safety First $Z_e \geq Z_0$ $\forall$ e, état de la nature

$$\Pr\{\tilde{Z} \leq Z_0\} \leq \alpha \text{ si } \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z_e \geq Z_0$$

- Formulation générale Chance Constrained Model (Charnes, Cooper 1959)

$$\Pr\{\tilde{Z} \leq Z_0\} \leq \alpha$$

$\tilde{Z}$ revenu aléatoire
Z_0 revenu minimal souhaité par l'agriculteur
α probabilité tolérée que le revenu minimal ne soit pas atteint

- Formulation linéarisée : Target-MOTAD (Tauer, 1983)

ModelEco

Chance-Constrained Model

Si on a un assez grand nombre d'état de la nature et que $\tilde{Z}$ suit une distribution normale alors :

$$\Pr\{\tilde{Z} \leq Z_0\} \leq \alpha \quad \text{s'écrit} \quad \mathbb{E}(\tilde{Z}) - Z_0 > \theta_\alpha \, \sigma(\tilde{Z})$$

Avec θ_α valeur issue des tables de Laplace Gauss

Données extraites des tables de Laplace Gauss					
α	0,3	0,2	0,1	**0,05**	0,01
θ	0,53	0,84	1,28	**1,65**	2,33

Par exemple, si l'agriculteur veut être sûr à 95% d'avoir un revenu de 18000, alors :

$$\Pr\{\tilde{Z} \leq 18000\} \leq 0{,}05 \quad \text{s'écrit} \quad \mathbb{E}(\tilde{Z}) - 18000 > 1{,}65 \, \sigma(\tilde{Z})$$

ModelEco

Ecriture en GAMS

Notation GAMS :

SQR	Carré
SQRT	Racine carrée

Avec :

RM	espérance du revenu (variable)
E	états de la nature (set)
Z0	scalaire du revenu minimum (scalar)
teta	coef. fonction de la probabilité (1,65 pour 95%) (scalar)
p(E)	probabilité de E (parameter)

Max $\mathbb{E}(\tilde{Z})$

s.c. $\mathbb{E}(\tilde{Z}) - Z_0 > \theta_\alpha \sigma(Ze)$

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}) = \sum_e [p_e \sum_j c_{je} x_j]$$

$$\sigma(\tilde{Z}) = \sqrt{\sum_e [Z_e - \mathbb{E}(\tilde{Z})]^2 . p_e}$$

⇓

```
objectif..           RM =e= sum(E, RAL(E)*p(E));
CCM..                RM-Z0 =g= teta*ETR;
revenuAlea(E)..     RAL(E) =e= sum(C, MB(E,C)*X(C));
ecarttype..          ETR =e= SQRT(sum[E, SQR(RAL(E)-Z)*p(E)]);
```

ModelEco

Linéarisation du modèle à contrainte de risque

Cas de grand modèle, plusieurs non-linéarité : Linéariser pour faciliter la résolution
Target-MOTAD : Variante de MOTAD avec linéarisation à contrainte de risque
Target/cible = revenu minimum à atteindre

Maximiser $\mathbb{E}(\tilde{Z}) = \sum_e [\, p_e \sum_j c_{je}\, x_j]$

Sous les contraintes

$$\sum_j a_{ij}\, x_j \leq b_i \qquad \forall i$$

$$\sum_j c_{je}\, x_j \geq Z_0 - D_e \quad \forall e$$

$$\sum_e p_e\, D_e \leq \lambda$$

$$x_j\,,\, D_e \geq 0 \qquad \forall j, e$$

Z0 : revenu seuil
D_e : totale de toute les déviations au revenu au dessous du revenu seuil
p_e : probabilité d'occurrence de l'état de nature e
λ : niveau de tolérance de déviation totale par rapport au revenu minimal Z0

ModelEco

Ecriture en GAMS

$$Z_0 - D_e \leq \sum_j c_{je} x_j \qquad \forall e$$

$$\sum_e p_e D_e \leq \lambda$$

- Déviation par rapport au revenu minimum pour chaque état de la nature

```
deviation(E).. Z0-DEV(E) =l= RAL(E) ;
```

- Contrainte limitant la somme pondérée des déviations

```
lambda.. sum(E,DEV(E)*p(E)) =l= LBD ;
```

Avec :

DEV(E) variable positive, mesure la déviation au dessous de Z0 par état de la nature

LBD scalaire mesurant la déviation moyenne tolérée choisi par exemple en fonction des caractéristiques de l'agriculteur